GROUPE B — PREMIERE COMPOSITION

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels.

On note ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice A.

« Respectivement » est abrégé en « resp ».

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i \text{ avec } \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est dit symétrique (resp : antisymétrique) s'il vérifie :

$\langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle$ (resp : $\langle u(\vec{x}), \vec{y} \rangle = - \langle \vec{x}, u(\vec{y}) \rangle$) pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

L'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ est noté e.

« Dimension » est abrégé en « dim ». « Déterminant » est abrégé en « dét ».

I

Soit f un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^n$.

1° *a.* Montrer que l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est symétrique.

b. Montrer que, dans une base orthonormée, la matrice A (resp B) associée à f (resp f^2) vérifie $A = -{}^tA$ (resp $B = {}^tB$).

c. Prouver que, pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $\langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle = 0$ et $\langle \vec{x}, f^2(\vec{x}) \rangle \leqslant 0$.

2° Soit $P(x) = \text{dét}(xe - f)$ [resp : $Q(x) = \text{dét}(xe - f^2)$] le polynôme caractéristique de f [resp f^2].

a. Montrer que les racines de $Q(x)$ sont des réels négatifs ou nuls.

b. Prouver que $(P(x))^2 = Q(x^2)$.

c. En déduire que les racines de P sont nulles ou imaginaires pures et que, si n est impair, 0 est racine de P.

3° Soit E un espace propre de f^2 associée à une valeur propre non nulle.

a. Prouver que $f(E) = E$.

b. Prouver que la dimension de E est paire.

c. Pour tout système libre $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}\}$ de vecteurs de E, on considère le sous-espace $F(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p})$ engendré par

$$\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p},\ f(\vec{x_1}), f(\vec{x_2}), \ldots, f(\vec{x_p})\}$$

Montrer que, si $\vec{x}$ est un vecteur de E n'appartenant pas à

$$F(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}),$$

on a : $\dim F(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}, \vec{x}) = \dim F(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}) + 2$.

En déduire l'existence d'un système libre de vecteurs $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_m}\}$ tels que $\{\vec{e_1}, f(\vec{e_1}), \vec{e_2}, f(\vec{e_2}), \ldots, \vec{e_m}, f(\vec{e_m})\}$ soit une base de E.

4° (*Cette question peut être traitée après la partie* II).

a. Montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f s'écrit (les coefficients de la matrice, ne figurant pas explicitement sont nuls) :

Si $n = 2p$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -a_p \\ & & & & & & a_p & 0 \end{bmatrix}.$$

si $n=2p+1$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & -a_1 & & & \\ & a_1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_p \\ & & & & a_p & 0 \end{bmatrix}$$

b. Montrer qu'un endomorphisme symétrique est le carré d'un endomorphisme antisymétrique, si et seulement si, son polynôme caractéristique $Q(x)$ peut être mis sous la forme :

$$x^{n-2k} \prod_{1 \leq i \leq k} (x + (a_i)^2)^2 \text{ où les } (a_i)_{1 \leq i \leq k} \text{ sont des réels.}$$

II

Soit A la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

1° Construire explicitement une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

et telle que $P^{-1}A^2P$ soit diagonale.

2° Déterminer l'ensemble des applications $t \longrightarrow \vec{V}(t)$ continûment différentiables de R dans R^4 satisfaisant à :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = A\,\vec{V}(t) \quad \text{et} \quad \vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail